二項分布から Poisson 分布の導出 ～Poisson の小数の法則～
計算特訓第２回：補助資料１

土居正明

1　はじめに

本稿では、第１回計算特訓でご質問が結構ありました「Poisson 分布ってどうしてああいう式になるんですか？」という問いにお答えします。

2　二項分布と Poisson 分布の確認

2.1　二項分布とは

二項分布 $B(n, p)$ とは、n 人の同じような人に対して、発生確率 p の疾病が何人発症するか、ということをモデル化したものです[*1]。確率関数は

$$f(x|n,p) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

と書けまして[*2]、x は発症人数、$f(x|n, p)$ は「n 人中 x 人発症する確率」です。

2.2　Poisson 分布とは

次に Poisson 分布 $Po(\lambda)$ ですが、これは実は**二項分布と大変近い**関係にあります。二項分布と同じく、**疾病が何人に発症するか**、ということをモデル化したものなのですが、平均 λ 人のとき、確率関数は

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

と書けます。二項分布と同じく x は発症人数、$f(x|\lambda)$ は x 人発症する確率です。今度は対象例数を無限大と考えていますので、x の定義域は $0, 1, 2, \cdots$ となります。

2.3　二項分布と Poisson 分布の使い分け

二項分布と Poisson 分布では、共に x が発症人数、$f(x|n, p)$, $f(x|\lambda)$ は x 人発症する確率でした。

[*1] 「『同じような人』なのに『発症する人』と『発症しない人』の両方がいる」、と考えるのが確率論的ものの見方です。逆に「同じような人なら『全員発症する』か『全員発症しない』かのどちらかだ」、と考えるのが決定論的なものの見方です。別の言い方をすれば、ある人が病気になったときに「集団からランダムに選ばれた（他の人が病気になってもよかったけれど、偶然その人だった）」と考えるのが確率論的ものの見方で、「その人は病気になっていない他の人とは違い、病気になる原因がはっきりとあった（他の人では代替不可能）」と考えるのが決定論的ものの見方です。統計では確率論的ものの見方をしますが、世間的には決定論的ものの見方の方が主流です。ですので、決定論的なものの見方しかしたことのないお医者さんなどには、「確率論的ものの見方とはなにか」というところから説明する必要があり、これが結構やっかいな仕事だと思います（私は直接経験はないですが）。少し乱暴な例では、決定論的なものの見方では「たばこは癌を引き起こす（たばこは癌の原因の１つである）」に対して「たばこを吸っても癌にならない人がいる」という理由で否定することが可能になります。一方で確率論的なものの見方では「たばこを吸っても癌になる人とならない人がいるけれど、たばこを吸った人の方が癌になる**確率が高くなる**」ということで因果関係を示すことができます。

[*2] 二項分布の場合、通常 $f(x|n, p)$ の n は書いても書かなくてもよいですが、Poisson 分布との対応を考える場合はある方が圧倒的に分かりやすいので書いておきます。

さて、では上の２つの分布をどのように使い分ければよいのでしょうか。ポイントは

(i) Poisson 分布は発生確率 p が小さくて例数 n が大きいときに使われる。

(ii) Poisson 分布の方が計算が楽なので、可能なら Poisson 分布を使いたい。

の２つです。つまり、**「Poisson 分布とは二項分布の発生確率 p が小、例数 n が大のときの状況を近似的に表している」**という風に解釈してください。つまり、例数が多い臨床試験で、稀な疾病の場合、２つはほとんど同じ結果を返すことになります。このようなときに、計算の楽な Poisson 分布を利用するのです。

3　二項分布から Poisson 分布へ：Poisson の小数の法則

3.1　記号・言葉の準備

さて、「Poisson 分布は二項分布の近似（発生確率小、例数大の場合）」だとご説明しました。これを数式できちんと考えましょう。数学ではこの事実は**「Poisson の小数の法則」**と呼ばれ、**二項分布を変形することで Poisson 分布を導出することが可能**です。「Poisson の小数の法則」の主張は、直感的に不自然な表現を含みますのでので、少しくわしくご説明します。

まず、二項分布の確率関数 (1) をもう少し詳しく書きなおします。確率 p を n の関数だと思って p_n と書きます。つまり、

$$f(x|n,p) = {}_nC_x(p_n)^x(1-p_n)^{n-x} \qquad (x=0,1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

と書きます。ここで大変奇妙な考え方をするのです。この p_n と n について、$n\to\infty$ を考えたいのですが、「n がいくつであっても $np_n=\lambda$ となると仮定する」ということをします。少し噛み砕いた表現をすれば、「『例数の小さいものからものすごく大きなものまで、たくさんの臨床試験があって、その疾病の**発生数がどの試験でも同じだった**』、というときに、それらの試験を例数が小さい試験から大きい試験へ順番に見ていった」という状況を考えていただけばよいでしょうか[*3]。このように極限を考えるのは、臨床試験の立場などからは大変奇妙なことをしています。数学的な処理のために、このようなことを考えているのだ、と考えてさらっと流してください。ただ、

$$np_n = \lambda$$

という関係は覚えておいてください。ここで重要なのは np_n は二項分布 (3) の平均値である、ということです。これはつまり、λ もまた Poisson 分布の平均値である可能性が高い[*4]ことを意味しています。

3.2　定理：Poisson の小数の法則

では、数学的にきちんとした表現で Poisson の小数の法則を述べましょう。

「定理：Poisson の小数の法則」

n と p_n が、n の値によらず $np_n=\lambda$ を満たすとき[*5]、$\tilde{f}(x|\lambda)$ を

$$\lim_{n\to\infty} f(x|n,p_n)$$

で定義すると、

$$\tilde{f}(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda)$$

[*3] 厳密な例ではありませんが、たとえば (i) 被験者 20 人の試験で 10 人発症 ($n_1=20, p_{n_1}=0.5$)、(ii) 被験者 100 人の試験で 10 人発症 ($n_2=100, p_{n_2}=0.1$)、(iii) 被験者 400 人の試験で 10 人発症 ($n_3=400, p_{n_3}=0.025$) のような場合です。このとき、$n_1p_{n_1}=n_2p_{n_2}=n_3p_{n_3}=10$ となり、$\lambda=10$ のシチェーションとなります。しかし、(i)〜(iii) は同じ薬の同じ疾病に対する臨床試験と考えると多分に奇妙な結果となります。従って、これらの過程は「数学的な議論をするために妙な仮定をしている」と思ってさらっと流して下さい。

[*4] 現実にそうなのですが、ここまでの議論ではまだ証明していないのでこのようなあいまいな表現にしてあります。

[*5] ここの条件は $np_n\to\lambda$ $(n\to\infty)$ まで緩めることができますが、議論が煩雑になるだけですのでやめました。それも含めて、数学の本で「Poisson の小数の法則」というものを調べた場合、これと本質的な部分が同じで、これとはいくらか異なるものに当たる可能性もありますのでご注意ください。

となる。つまり、x は Poisson 分布に従う。

(証明)

式を地道に変形していけば出てきます。

$$
\begin{aligned}
f(x|n,p_n) &= {}_nC_x (p_n)^x (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}(p_n)^x(1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+2)(n-x+1)}{x!}(p_n)^x(1-p_n)^{n-x} \\
&= \{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+2)(n-x+1)(p_n)^x\}\cdot\frac{1}{x!}\cdot(1-p_n)^{n-x}
\end{aligned}
$$

となります。これを 3 つの部分にわけます。$\underline{n\to\infty \text{ のとき}}$

(a) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+2)(n-x+1)(p_n)^x \to \lambda^x$

(b) $\frac{1}{x!} \to \frac{1}{x!}$ （そのまま）

(c) $(1-p_n)^{n-x} \to \exp(-\lambda)$

となることをそれぞれ見ていきます。

(a) 重要なのは、$n\to\infty$ を考える際に (np_n) をひとカタマリにしてやることです。

$$
\begin{aligned}
\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+2)(n-x+1)}_{x\text{ 個}}(p_n)^x &= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-x+2}{n}\cdot\frac{n-x+1}{n}\cdot(np_n)^x \\
&= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\cdot(np_n)^x \\
&\to \lambda^x \ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

です。なぜなら $np_n=\lambda$ であり、そこより前の掛け算の部分は x 個（n が増えても掛け算の数は増えない）であり、$n\to\infty$ で全て 1 になるからです。

(b) そのままです。

(c) ここが最も面倒です。重要なのは $np_n=\lambda$ から $p_n=\frac{\lambda}{n}$ となることと、e^x の定義

$$
e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{4}
$$

です。

$$
\begin{aligned}
(1-p_n)^{n-x} &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \\
&= \frac{\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^x}
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ を考えますと、**分母**は x は固定されていて $\frac{(-\lambda)}{n}$ の部分がひたすら小さくなりますので全体として 1 に近づきます。**分子**は (4) に $x = -\lambda$ を代入したものより、$\exp(-\lambda)$ になります。まとめますと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^x} &\to \frac{\exp(-\lambda)}{1} \quad (n \to \infty) \\
&= \exp(-\lambda)
\end{aligned}
$$

となります。これより、(c) が示せました。

以上、(a)〜(c) を合わせますと

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x|\lambda) &= \lim_{n\to\infty} f(x|n, p_n) \\
&= \lambda^x \cdot \frac{1}{x!} \cdot \exp(-\lambda) \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)
\end{aligned}
$$

となり、x が Poisson 分布に従うことが分かりました。 (証明終わり)

4 おわりに

このように、実際に二項分布をベースにして Poisson 分布を構成するのは結構大変です。「毎回自分で考えて求めたい」という方もいらっしゃるかと思いますが、制限時間のあるテスト中ではかなり厳しいのが現実かと思われます。ですので卒業試験対策としては、**「(理解はしつつ) 暗記する」のが最も現実的**な対処法かと思われます。第 1 回計算特訓も、解いているうちに自然に記憶できるように大量の問題を出題していますので、解きながら覚えていただければと思います。