二項分布と Poisson 分布の平均・分散

計算特訓第３回：補助資料１

土居正明

はじめに

本稿では、**二項分布と Poisson 分布の平均・分散の求め方**をご説明します。問題文中に入れようかと思っていましたが、長くなりそうなので分けることにしました。

計算は大変テクニカルで、１回読んだだけでは再現できない方が多いと思われます。**読んだ後、必ず何も見ないで自分で計算し直してください**。

1 二項分布

まずは二項分布からです。二項分布 $Bin(n,p)$ の確率関数は $f(x|n,p) = {}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x}$ です。

ここで重要なのは、**二項定理**

$$(a+b)^n = {}_nC_0\ a^0b^n + {}_nC_1\ a^1b^{n-1} + {}_nC_2\ a^2b^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}\ a^{n-1}b + {}_nC_n\ a^nb^0$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\ a^xb^{n-x}$$

です。特に、$\underline{a = p,\ b = 1-p\ のとき}$、

$$(p+(1-p))^n = {}_nC_0\ p^0(1-p)^n + {}_nC_1\ p^1(1-p)^{n-1} + {}_nC_2\ p^2(1-p)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}\ p^{n-1}(1-p) + {}_nC_n\ p^n(1-p)^0$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x}$$

であり、ここで左辺は $\underline{p+(1-p) = 1\ より\ 1\ になります}$ ので、まとめますと

$$1 = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x} \tag{1}$$

です[*1]。

1.1 平均

では平均を計算しましょう。定義に従って計算します。

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x|n,p) \tag{2}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x} \tag{3}$$

*1 これは「二項分布の確率関数を全て足すと１になる」ことを言っています。

この $\sum$ で、$x=0$ の部分 を考えますと

$$(x=0)：0 \cdot {}_nC_0\, p^0(1-p)^n = 0$$

となります。0 を足しても引いても合計の値には影響がありませんので、$\sum$ で足すのを $x=1$ からにしてやっても問題ありません。そこで (3) の続きを計算しますと

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_nC_x\, p^x(1-p)^{n-x} &= \sum_{x=1}^{n} x \cdot {}_nC_x\, p^x(1-p)^{n-x} && (4)\\
&= \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} \cdot p^x(1-p)^{n-x} \qquad \left(\because\ {}_nC_x = \frac{n!}{(n-x)!x!}\right) && (5)\\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} \cdot p^x(1-p)^{n-x} && (6)
\end{aligned}$$

ここで、最初の分数の部分を C を用いて書くことを考えます。そこで

$${}_{n-1}C_{x-1} = \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \tag{7}$$

を使えないか、と考えます。異なっているのは分子の $n!$ と $(n-1)!$ だけです。ここで $n! = n \cdot (n-1)!$ ですので、これを用いて変形できそうです。そこで (6) を変形すると

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} \cdot p^x(1-p)^{n-x} &= \sum_{x=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} \cdot p^x(1-p)^{n-x} && (8)\\
&= \sum_{x=1}^{n} n \cdot {}_{n-1}C_{x-1}\, p^x(1-p)^{n-x} \qquad (\because (7)) && (9)\\
&= n\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}C_{x-1}\, p^x(1-p)^{n-x} && (10)
\end{aligned}$$

n の部分が $(n-1)$ になりましたので、今度は二項定理 (1) の n を $(n-1)$ に変えたもの

$$1 = (p+(1-p))^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} {}_{n-1}C_x\, p^x(1-p)^{n-1-x} \tag{11}$$

が使えないか、と考えます。それを意識しながら (10) を変形していきます。このとき、$\sum$ の足し算が $x=1$ からとなっていて二項定理が使いにくそうなので、文字を変更します。$y = x-1$ とおいてやる と $x = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のとき、$y = 0,\ 1,\ \cdots,\ (n-1)$ となります。これを利用して (10) は

$$\begin{aligned}
n\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}C_{x-1}\, p^x(1-p)^{n-x} &= n\sum_{y=0}^{n-1} {}_{n-1}C_y\, p^{y+1}(1-p)^{n-y-1}\\
&= np\sum_{y=0}^{n-1} {}_{n-1}C_y\, p^y(1-p)^{n-1-y}\\
&= np \qquad (\because (11))
\end{aligned}$$

となります。したがって

$$E[X] = np$$

であることが示されました。

1.2　分散

　では次に分散を考えましょう。分散を求めるには

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

が使えます。したがって $E[X^2]$ が求まればよいのですが、今回は計算の便宜上 まず $E[X(X-1)]$ を求めます[*2]。

1.2.1　$E[X(X-1)]$ の計算

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot f(x|n,p) && (12) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)_n C_x\, p^x (1-p)^{n-x} && (13) \\ & && (14) \end{aligned}$$

です。この $\sum$ で、$x = 0, 1$ のときを考えてみますと、

$$(x=0)\text{:}\, 0 \cdot (-1) \cdot {}_nC_0\, p^0 (1-p)^n = 0$$
$$(x=1)\text{:}\, 1 \cdot 0 \cdot {}_nC_1\, p^1 (1-p)^{n-1} = 0$$

より、$\sum$ は $x = 2$ から足せばよい、ということになります。これより (13) を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \cdot {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} && (15) \\ &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} && (16) \\ &= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-2)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} && (17) \end{aligned}$$

ここで、平均と同じような発想をします。今度は x の部分が $(x-2)$ になっていることから

$${}_{n-2}C_{x-2} = \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} \qquad (18)$$

が使えないかと考えます。分子の $n!$ と $(n-2)!$ を見比べて $n! = n(n-1) \cdot (n-2)!$ が成り立つことから、(17) を (18) を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-2)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} &= \sum_{x=2}^{n} n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} && (19) \\ &= n(n-1) \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} \cdot p^x (1-p)^{n-x} && (20) \\ &= n(n-1) \sum_{x=2}^{n} {}_{n-2}C_{x-2}\, p^x (1-p)^{n-x} && (21) \end{aligned}$$

ここでも平均と同様に、二項定理を今度は $(n-2)$ 乗で使いたくなります。つまり

$$1 = (p + (1-p))^{n-2} = \sum_{x=0}^{n-2} {}_{n-2}C_x\, p^x (1-p)^{n-2-x} \qquad (22)$$

[*2] 本稿を読み終わった後 $E[X^2]$ を直接計算してみて「どうして $E[X(X-1)]$ の方が計算が楽なのか」を考えてみると、大変勉強になると思います。

です。ここでやはり平均と同様に $\sum$ が $x=0$ でなくて嫌なので、$\underline{y = x-2\text{ としてやります}}$。いま、$x=2,\cdots,\ n$ より $y=0,\cdots,\ (n-2)$ となり、(21) を変形すると

$$
\begin{aligned}
n(n-1)\sum_{x=2}^{n} {}_{n-2}C_{x-2}\, p^x(1-p)^{n-x} &= n(n-1)\sum_{y=0}^{n-2} {}_{n-2}C_y \cdot p^{y+2}(1-p)^{n-y-2} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{n-2} {}_{n-2}C_y \cdot p^{y}(1-p)^{n-2-y} \\
&= n(n-1)p^2 \qquad (\because (22))
\end{aligned}
$$

より、結局

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$$

であることが分かりました。

1.2.2 $E[X^2]$ と $V[X]$ の計算

さて、これで準備はほぼ整いました。

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X]$$

より、ここに $E[X] = np$ と $E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= E[X^2] - E[X] \\
n(n-1)p^2 &= E[X^2] - np \\
E[X^2] &= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

となります。

1.3 まとめ

以上より、二項分布の平均・分散は

$$
\begin{aligned}
E[X] &= np \\
V[X] &= np(1-p)
\end{aligned}
$$

です。ついでにまとめておきますと

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \\
E[X^2] &= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
$$

です。

2 Poisson 分布

では次に Poisson 分布です。Poisson 分布と二項分布が大変近い関係にあるのは第 2 回の補助資料でもご説明した通りです。ですので 平均・分散の計算においても基本的に同じ戦略が通用します。

Poisson 分布 $Po(\lambda)$ の確率関数は $f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ です。

ただし、今度重要になるのは、二項定理ではなく e^λ における $\lambda = 0$ での Taylor 展開

$$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} + \cdots \quad = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \tag{23}$$

です。

2.1 平均

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f(x|\lambda) \qquad (24) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (25) \end{aligned}$$

ここで、$x = 0$ のとき

$$0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 0$$

より、$\sum$ の和は $x = 1$ から としてよく、(25) は

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (26) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda} \qquad (27) \end{aligned}$$

となります。ここで、二項分布と同様に $\sum$ の和を 0 から開始するために $y = x - 1$ とおきます。このとき $x = 1,\ 2,\ 3\ \cdots$ ですが、無限に続くので $y = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ となり、y も結局 ∞ まで行ってしまいます。そこで (27) は

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda} &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+1}}{y!} e^{-\lambda} \qquad (28) \\ &= \lambda \left(\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \right) e^{-\lambda} \qquad (29) \end{aligned}$$

ここで、Taylor 展開 (23) を用いると (29) は

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \right) e^{-\lambda} &= \lambda \cdot e^\lambda \cdot e^{-\lambda} \qquad (\because (23)) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

となり、結局

$$E[X] = \lambda$$

となります。

2.2 分散

では次に分散です。**二項分布と同様に、最初は** $E[X(X-1)]$ **を求めます**。

2.2.1 $E[X(X-1)]$ の計算

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdot f(x|\lambda) \tag{30}$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdot \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{31}$$

です。ここで、二項分布と同じく $x=0,1$ の場合を考えると

$$(x=0)\colon 0\cdot(-1)\cdot\frac{\lambda^0}{0!}=0$$
$$(x=1)\colon 1\cdot 0\cdot\frac{\lambda^1}{1!}=0$$

より、$\sum$ は $x=2$ から足せばよくなります。これより (31) は

$$\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdot\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\cdot\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{32}$$
$$= \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}e^{-\lambda} \tag{33}$$

ここで $y=x-2$ とおく と、$x=2,\ 3,\ 4,\cdots$ のとき、$y=0,\ 1,\ 2,\cdots$ であり (33) は

$$\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}e^{-\lambda} = \sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y+2}}{y!}e^{-\lambda} \tag{34}$$
$$= \lambda^2\left(\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}\right)e^{-\lambda} \tag{35}$$

ここで Taylor 展開 (23) を用いると (35) は

$$\lambda^2\left(\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}\right)e^{-\lambda} = \lambda^2\cdot e^{\lambda}\cdot e^{\lambda} \qquad (\because (23))$$
$$= \lambda^2$$

従って、

$$E[X(X-1)] = \lambda^2$$

が分かりました。

2.2.2 $E[X^2]$ と $V[X]$

では、これも二項分布と同様に、$E[X^2]$ と $V[X]$ を求めましょう。$E[X(X-1)]=\lambda^2$ と $E[X]=\lambda$ より

$$E[X(X-1)] = E[X^2]-E[X]$$
$$\lambda^2 = E[X^2]-\lambda$$
$$E[X^2] = \lambda^2+\lambda$$

です。これより

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

となり、$V[X] = \lambda$ が分かりました。

2.2.3　まとめ

　以上をまとめますと

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \lambda \\
V[X] &= \lambda
\end{aligned}
$$

となり、**Poisson 分布では平均と分散が等しくなります**。ついでにまとめておきますと

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \lambda^2 \\
E[X^2] &= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

です。